

## ROUMANIE

Lycée Louis-le-Grand, test pour l'entrée en classe préparatoire  
MPSI, session 2009

Durée du test : 4 heures

*Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.*

**Exercice 1** Montrer que le système

$$\begin{cases} x^4 + y^4 &= z^4 \\ x^5 + y^5 &= z^5 \end{cases}$$

n'admet aucune solution  $(x, y, z) \in ]0, +\infty[^3$ .

**Exercice 2** Résoudre dans  $\mathbb{R}^*$  l'équation  $xe^x + e^{1/x} = 0$ . On remarquera que cette équation admet exactement une racine strictement négative que l'on déterminera.

**Exercice 3 a.** Montrer que, si 7 ne divise pas l'entier  $n$ , alors 7 divise  $n^6 - 1$ .  
**b.** Déterminer les entiers  $n \geq 1$  tels que 7 divise  $n^n - 3$ .

**Exercice 4** Soit  $ABC$  un triangle. On pose  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$ . On suppose que  $\widehat{BAC} \in ]0, \frac{\pi}{3}]$ . Montrer que

$$a \leq \max(b, c).$$

**Exercice 5 a.** Donner des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{1}{x(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}.$$

**b.** Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)(k+3)}.$$

**Exercice 6** Soit  $x$  et  $y$  deux réels positifs ou nuls. Montrer que

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leq \sqrt[3]{|x - y|}.$$

**Exercice 7** Soit  $P(x) = x^3 - x + 1$ .

- a. Montrer que  $P$  admet une unique racine réelle, que l'on note  $\alpha$ .
- b. Montrer que  $P$  admet deux autres racines complexes  $\beta$  et  $\gamma = \bar{\beta}$ .
- c. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n.$$

Calculer  $u_0, u_1, u_2$ .

- d. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .
- e. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \pi \alpha^n$ .

**Exercice 8** Donner une primitive de la fonction

$$x \mapsto e^{-x} \sin^2 x.$$

**Exercice 9** Soit  $ABC$  un triangle non aplati. Le cercle inscrit à  $ABC$  est tangent en  $A'$  à  $[BC]$ , en  $B'$  à  $[CA]$  et en  $C'$  à  $[AB]$ . Montrer que les trois droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

**Exercice 10** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On suppose que les suites  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n^2 - v_n^4)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées.

**Exercice 11** On dit qu'une application  $f$  de  $[1, n]$  vers  $[1, 2]$  est une surjection de  $[1, n]$  sur  $[1, 2]$  lorsque  $f([1, n]) = [1, 2]$  (c'est-à-dire que tout élément de  $[1, 2]$  est l'image par  $f$  d'un élément de  $[1, n]$ ).

Pour  $n \geq 2$ , déterminer le nombre de surjections de  $[1, n]$  sur  $[1, 2]$ .

**Exercice 12**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe un réel  $\varepsilon_n > 0$  vérifiant la propriété suivante : quels que soient les entiers naturels non nuls  $k_1, \dots, k_n$  tels que  $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} < 1$ , alors  $\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} \leq 1 - \varepsilon_n$ .